05-11-20

- <u>Ύπαρξη και μονοσήμαντο λύσεων για π.α.τ. γραμμικών εξισώσεις:</u>

$\boxed{\text{Θεώρημα (5)}}$: Ας είναι $n\in\mathbb{N}$, $b, a_i \in C(I)$, $i=0,\dots,n$ με $a_n(t)\neq 0$, $t\in I$ και I διάστημα της πραγματικής ευθείας, τότε η γρ. διαφορική εξίσωση n-τάξης: $a_n(t)y^{(n)}(t)+\dots+a_0(t)y(t)=b(t)$, $t\in I$ έχει ακριβώς μία λύση στο I που πληροί τις αρχικές συνθήκες: $y(t_0)=y_0$, $y'(t_0)=y_1$, $\dots$, $y^{(n-1)}(t_0)=y_{n-1}$.
για οποιεσδήποτε σταθερές $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$.

$\boxed{\text{Πορίσματα}}$: • Το ομογενές γραμμικό π.α.τ. n-τάξης:
$a_n(t)y^{(n)}(t)+\dots+a_0(t)y(t)=0$, $t\in I$, $y(t_0)=y_0, \dots, y^{(n-1)}(t_0)=y_{n-1}$
έχει ακριβώς μία λύση στο I για οποιεσδήποτε σταθερές $y_0,\dots,y_{n-1}$.
• Η μηδενική συνάρτηση ($y\equiv 0$, $t\in I$) είναι η μοναδική λύση του (ομογενούς) π.α.π. n-τάξης: $a_n(t)y^{(n)}(t)+\dots+a_0(t)y(t)=0$, $t\in I$
$y(t_0)=0=y'(t_0)=\dots=y^{(n-1)}(t_0)$

Προαπαιτούμενες γνώσεις-υπενθυμίσεις.

- <u>**Γραμμικά Συστήματα.**</u>

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

$$A\bar{x}=\bar{b} \text{ με } A=\begin{bmatrix} a_{11}+a_{12}+\dots+a_{1n} \\ a_{21}+a_{22}+\dots+a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}+a_{n2}+\dots+a_{nn} \end{bmatrix}, \bar{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \bar{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

(i) Ένα γ.δ.σ. $n\times n$ έχει ακριβώς μία λύση αν-ν η ορίζουσα των συντελεστών του είναι διάφορη του μηδενός.
(ii) Ένα ομογενές γ.δ.σ. $n\times n$ έχει μη μηδενικές λύσεις αν-ν η ορίζουσα των συντελεστών του είναι ίση με το μηδέν.
(iii) Ένα ομογενές γ.δ.σ. $m\times n$ με $m<n$ έχει μη μηδενικές λύσεις.

- Βασικό θεώρημα της Άλγεβρας για ρίζες πολυωνύμων.

- Παραγώγιση πινάκων:

$$A'(t)=\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & \dots & a'_{1n}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & \dots & a'_{2n}(t) \\ \vdots & & & \\ a'_{n1}(t) & a'_{n2}(t) & \dots & a'_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

Πχ $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} t^3 & \sin t \\ \cos 3t & e^t+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t^3)' & (\sin t)' \\ (\cos 3t)' & (e^t+2)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t^2 & \cos t \\ -3\sin 3t & e^t \end{bmatrix}$

- Παραγώγιση οριζουσών:

$$D'=\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \dots a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \dots a_{2n}(t) \\ \vdots & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) \dots a_{nn}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) \dots a'_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \dots a_{2n}(t) \\ \vdots & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) \dots a_{nn}(t) \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \dots a_{1n}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) \dots a'_{2n}(t) \\ \vdots & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) \dots a_{nn}(t) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \dots a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \dots a_{2n}(t) \\ \vdots & \\ a'_{n1}(t) & a'_{n2}(t) \dots a'_{nn}(t) \end{vmatrix} =$$

$$= D_1' + D_2' + \dots + D_n'$$

Πχ $\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} t^3 & \sin t \\ \cos 3t & e^t+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (t^3)' & (\sin t)' \\ \cos 3t & e^t+2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t^3 & \sin t \\ (\cos 3t)' & (e^t+2)' \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} 3t^2 & \cos t \\ \cos 3t & e^t+2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t^3 & \sin t \\ -3\sin t & e^t \end{vmatrix}$$

Επιβεβαίωση:

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} t^3 & \sin t \\ \cos 3t & e^t+2 \end{vmatrix} = \frac{d}{dt}\left| (e^t+2)t^3 - \sin t\cos 3t \right| = \dots$$

- **Συναρτήσεις γραμμικά ανεξάρτητες – γραμμικά εξαρτημένες :**

Ορισμός : Ας είναι $f_1, \dots, f_m$ συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι οι συναρτήσεις είναι γρ. εξαρτημένες στο $J \subseteq I$, αν υπάρχουν σταθερές $c_1, \dots, c_m$ με $|c_1| + \dots + |c_m| \neq 0$ τ.ω. : $c_1 f_1 + \dots + c_m f_m = 0$, $t \in J$.
Σε αντίθετη περίπτωση, λέμε ότι οι συναρτήσεις είναι γρ. ανεξάρτητες στο $J \subseteq I$.

Παρατήρηση : Οι συναρτήσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο $J \subseteq I$ αν $c_1 f_1 + \dots + c_m f_m = 0, \forall t \in J \Rightarrow c_1 = 0 = c_2 = \dots = c_m$.

Παραδείγματα :
- Οι συναρτήσεις $t^2, t^3, t \in \mathbb{R}$ είναι γρ. ανεξάρτητες :
Πράγματι, για $t \in \mathbb{R}$ είναι $c_1 t^2 + c_2 t^3 + c_3 t = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$
- Οι συναρτήσεις $t^5, t^3, t \in \mathbb{R}$ είναι γρ. εξαρτημένες στο $\{-1, 0, 1\}$:
Είναι $2t^5 - 6t^3 + 4t = 0$, $t \in \{-1, 0, 1\}$.
- Οι συναρτήσεις $t^2 + \cos 2t, \cos t, t^2 - 1, 7$, $t \in \mathbb{R}$ είναι γρ. εξαρτημ.

- **Η ορίζουσα Wronski :**

Ορισμός : Αν οι συναρτήσεις $f_1, \dots, f_n$ έχουν παραγώγους μέχρι και $n-1$ τάξης στο διάστημα I, τότε η συνάρτηση $W(f_1, \dots, f_n): I \to \mathbb{R}$ με

$$W(f_1, \dots, f_n)(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \dots & f_n(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & \dots & f_n'(t) \\ \vdots & & & \\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & \dots & f_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

καλείται ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων $f_1, \dots, f_n$

Πχ Η ορίζουσα των συναρτήσεων $f_1(t) = t^3$, $f_2(t) = \sin t$, $t \in \mathbb{R}$ είναι η:

$$W(f_1, f_2)(t) = \begin{vmatrix} t^3 & \sin t \\ 3t^2 & \cos t \end{vmatrix} = t^3 \cos t - 3t^2 \sin t$$

• **Η γραμμική εξίσωση n-τάξης.**

Ας είναι I ένα διάστημα της πραγματικής ευθείας, $n \in \mathbb{N}$

$a_n(t)y^{(n)}(t)+\ldots+a_0(t)y(t)=b(t)$, $t\in I$, $b, a_i \in C(I)$, $i=0,\ldots,n$, $a_n(t)\neq 0$, $t\in I$

$y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ (πραγματικές) σταθερές, $t_0 \in I$

$y(t_0)=y_0$, $y'(t_0)=y_1, \ldots, y^{(n-1)}(t_0)=y_{n-1}$.

Η απεικόνιση $L: C^n(I) \to C(I)$ με $L(\varphi)(t)=a_n(t)\varphi^{(n)}(t)+\ldots+a_0\varphi(t)$

καλείται διαφορικός τελεστής της δ.ε.

$\boxed{\text{Πρόταση}}$: Ο διαφορικός τελεστής L είναι ένας γραμμικός τελεστής.

Απόδειξη: Είναι $L(k\varphi+m\psi)=a_n(t)(k\varphi+m\psi)^{(n)}(t)+\ldots+a_0(t)(k\varphi+m\psi)=$

$=k[a_n(t)\varphi^{(n)}(t)+\ldots+a_0(t)\varphi(t)]+m[a_n(t)\psi^{(n)}(t)+\ldots+a_0(t)\psi(t)]=$

$=kL(\varphi)+mL(\psi)$

Η εξίσωση $L(\varphi)=b$, $\varphi\in C^n(I)$

Η ομογενής εξίσωση $L(\varphi)=0$, $\varphi \in C^n(I)$

• **Ομογενείς Γραμμικές Εξισώσεις.**

$\boxed{\text{Θεώρημα (1)}}$: Αν I είναι ένα διάστημα της πραγματικής ευθείας, $n\in\mathbb{N}$, $b, a_i \in C(I)$, $i=0,\ldots,n$ με $a_n(t)\neq 0$, $t\in I$ και $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ είναι πραγματικές σταθερές, τότε για $t_0\in I$ $\exists!$ λύση της γρ. διαφ. εξίσωσης n-τάξης

$a_n(t)y^{(n)}(t)+\ldots+a_0(t)y(t)=0$, $t\in I$

που είναι ορισμένη σε όλο το I και πληροί τις αρχικές συνθήκες

$y(t_0)=y_0$, $y'(t_0)=y_1, \ldots, y^{(n-1)}(t_0)=y_{n-1}$.

$\boxed{\text{Πορίσματα}}$: • Το ομογενές γραμμικό π.α.τ. n-τάξης:

$a_n(t)y^{(n)}(t)+\ldots+a_0(t)y(t)=0$, $t\in I$ $\quad (E_0^n)$

$y(t_0)=0$, $y'(t_0)=0, \ldots, y^{(n-1)}(t_0)=0$

$\boxed{\text{Θεώρημα (3)}}$: (Υπέρθεση) Αν $c_1 \ldots c_m$ είναι σταθερές και $y_1,\ldots,y_m \in C^n(I)$ είναι λύσεις της ομογενούς γ.δ.ε. n-τάξης (E_0^n), τότε η συνάρτηση $y(t)=c_1y_1(t)+\ldots+c_my_m(t)$, $t\in I$, είναι επίσης λύση της εξισωσεις (E_0^n)

Απόδειξη: Από την γραμμικότητα του τελεστή L έχουμε:
$L(y)(t) = L(c_1y_1 + .. + c_my_m)(t) = c_1L(y_1)(t) + .. + c_mL(y_m)(t) = 0, t \in I$

- **Η ομογενής γ.δ.ε. πρώτης τάξης.**

Θεώρημα (3): Ας είναι I ένα διάστημα της πραγματικής ευθείας, $t_0 \in I$, $a_1, a_0 \in C(I)$ με $a(t) \neq 0, t \in I$.
Τότε η y είναι μια λύση της ομογενούς γ.δ.ε πρώτης τάξης:
$a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0, t \in I$ αν-ν $y(t) = y(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t}\frac{a_0(s)}{a_1(s)}ds}, t \in I$

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Αν y είναι μια λύση της εξίσωσης
$a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0$, $t \in I$ ορισμένη στο I τότε για την συνάρτηση:
$z(t) = y(t)\, e^{\int_{t_0}^{t}\frac{a_0(s)}{a_1(s)}ds}, t \in I$, είναι:

$$z'(t) = \frac{d}{dy}\left[y(t)\, e^{\int_{t_0}^{t}\frac{a_0(s)}{a_1(s)}ds}\right] = y'(t)\, e^{\int_{t_0}^{t}\frac{a_0(s)}{a_1(s)}ds} + y(t)\, e^{\int_{t_0}^{t}\frac{a_0(s)}{a_1(s)}ds}\frac{a_0(t)}{a_1(t)}$$

και: $$z'(t) = e^{\int_{t_0}^{t}\frac{a_0(s)}{a_1(s)}ds} \cdot \frac{1}{a_1(t)}\left[a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t)\right] = 0$$

- **Γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις ομογενούς γ.δ.ε. n-τάξης:**

Θεώρημα (4): Ας είναι $y_1 .. y_n \in C^n(I)$ λύσεις της ομογενούς γ.δ.ε. n-τάξης (E_0^n). Οι λύσεις αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο I αν-ν: $W(y_1, .., y_n) \neq 0$, $\forall t \in I$

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Ας είναι $y_1, .., y_n \in C^n(I)$ γρ. ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς γ.δ.ε. (E_0^n) και ας υποθέσουμε ότι $\exists t_0 \in I$ τ.ω.
$W(y_1, .., y_n)(t_0) = 0$.
Θεωρούμε το ομογενές γ.δ. σύστημα (ως προς $c_1, .., c_n$)

$$\begin{cases} c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) + .. + c_ny_n(t_0) = 0 \\ c_1y_1'(t_0) + c_2y_2'(t_0) + .. + c_ny_n'(t_0) = 0 \\ \quad \vdots \\ c_1y_1^{(n-1)}(t_0) + c_2y_2^{(n-1)}(t_0) + .. + c_ny_n^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{cases}$$

και παρατηρούμε ότι η ορίζουσα των συντελεστών του είναι μηδέν επομένως έχει μη μηδενική λύση $c_1, \dots, c_n : |c_1| + \dots + |c_n| \neq 0$
Η συνάρτηση $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t)$, $t \in I$ είναι μία λύση της εξίσωσης που πληροί τις αρχικές συνθήκες
$y(t_0) = 0$, $y'(t_0) = 0$, $\dots$, $y^{(n-1)}(t_0) = 0$
Συνεπώς, θα πρέπει να είναι $y(t) = 0$, $t \in I$ δηλαδή για τις γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις θα είναι:
$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t) = 0$, $t \in I$, $|c_1| + \dots + |c_n| \neq 0$
που αντίκειται στον ορισμό της γρ. ανεξαρτησίας.

($\Leftarrow$) Ας είναι $y_1, \dots, y_n \in C^n(I)$ λύσεις της ομογενούς γ.δ.ε. (E_0^n) για τις οποίες είναι $W(y_1, \dots, y_n)(t) \neq 0$, $\forall t \in I$.
Θα αποδείξουμε ότι οι λύσεις αυτές είναι γρ. ανεξάρτητες.
Ας είναι $c_1, \dots, c_n$ σταθερές τ.ω. $c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t) = 0$, $\forall t \in I$
Παρατηρούμε ότι η ορίζουσα των συντελεστών του ομογενούς γρ. αλγεβρικού συστήματος (ως προς $c_1, \dots, c_n$):

$$\begin{cases} c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t) = 0 \\ c_1 y_1'(t) + c_2 y_2'(t) + \dots + c_n y_n'(t) = 0 \\ \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(t) + c_2 y_2^{(n-1)}(t) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(t) = 0 \end{cases}$$

είναι η ορίζουσα $W(t) \neq 0$ η οποία από την υπόθεση μας είναι μη μηδενική.
Συνεπώς, το αλγεβρικό τετραγωνικό σύστημα έχει μόνον την μηδενική λύση, είναι δηλ. $c_1 = 0 = \dots = c_n$ απ' όπου έπεται ότι οι λύσεις $y_1, \dots, y_n$ είναι γρ. ανεξάρτητες συναρτήσεις.